

附錄 I：一些基本定理的證明

在本附錄中，我們證明一些基本的定理。

定理 1.1 唯一性

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, L_1 與 L_2 皆為某實數，則 $L_1 = L_2$ 。

證 我們假設 $L_1 \neq L_2$ 而證明此假設導致矛盾，於是，可得 $L_1 = L_2$ 。令

$$\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$$

因假設 $L_1 \neq L_2$ ，故 $\varepsilon > 0$ 。

從假設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ ，可找到 $\delta_1 > 0$ ，使得當

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ 時,} \quad \textcircled{1}$$

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \quad \textcircled{2}$$

又因 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ ，故可找到 $\delta_2 > 0$ ，使得當

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ 時,} \quad \textcircled{3}$$

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \quad \textcircled{4}$$

令 δ 為兩數 δ_1 與 δ_2 中最小者，且選取滿足 $0 < |x - a| < \delta$ 的任一 x 。因 $\delta \leq \delta_1$ 且 $\delta \leq \delta_2$ ，故 x 同時滿足 ① 式與 ③ 式，所以， $f(x)$ 同時滿足 ② 式與 ④ 式。但

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= |L_1 - L_2| \\ &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &= |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

此為矛盾。

定理 1.3

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, 則

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$, c 為常數
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)][\lim_{x \rightarrow a} g(x)] = LM$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$)

證 (1) 依定義 2.1, 對每一 $\varepsilon > 0$, 要找到 $\delta > 0$, 使得

$$\text{若 } 0 < |x - a| < \delta, \text{ 則 } |cf(x) - cL| < \varepsilon$$

當 $c = 0$ 時, $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = 0$ 顯然成立.

當 $c \neq 0$ 時, 因 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, 故對 $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$, 存在一 $\delta_1 > 0$, 使得

$$\text{若 } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ 則 } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

取 $\delta = \delta_1$, 可得

$$|cf(x) - cL| = |c||f(x) - L| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

(2) 令 $\varepsilon > 0$ 為給定者. 欲證明 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$, 我們必須證明對每一 $\varepsilon > 0$, 可找到 $\delta > 0$, 使得若

$$0 < |x - a| < \delta \tag{①}$$

則

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \tag{②}$$

因 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, 故可找到 $\delta_1 > 0$, 使得若

$$0 < |x - a| < \delta_1 \tag{③}$$

則

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

又因 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ，故可找到 $\delta_2 > 0$ ，使得若

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad (5)$$

則

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 。若 x 滿足 ① 式，則因 $\delta \leq \delta_1$ 且 $\delta \leq \delta_2$ ，故 x 也同時滿足 ③ 式與 ⑤ 式。所以，

$$\begin{aligned} & |f(x) + g(x) - (L + M)| \\ &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

於是，對於選取的 δ ，當 ① 式滿足時，② 式滿足，證明完畢。

在 (1) 中，令 $c = -1$ ，可得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} (-1)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + (-1) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= L - M \end{aligned}$$

(3) 令 $\varepsilon > 0$ 為給定者。我們必須找到 $\delta > 0$ ，使得若

$$0 < |x - a| < \delta \quad (7)$$

則

$$|f(x) - g(x) - LM| < \varepsilon \quad (8)$$

欲求 δ ，我們以不同的形式表 ⑧ 式。我們可寫成

$$f(x) = L + (f(x) - L), \quad g(x) = M + (g(x) - M)$$

上面兩式相乘，然後兩端同時減去 LM ，可得

$$f(x)g(x) - LM$$

$$=L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)$$

故 ⑧ 式可改寫成

$$|L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)| < \varepsilon \quad \text{⑨}$$

於是，我們必須找到 $\delta > 0$ ，使得當 ⑦ 式成立時，⑨ 式成立。

因 $\varepsilon > 0$ ，故 $\sqrt{\varepsilon/3}$ 、 $\varepsilon/3(1+|L|)$ 與 $\varepsilon/3(1+|M|)$ 皆為正。

所以，因

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

故可找到正數 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 與 δ_4 ，使得

$$\left. \begin{aligned} |f(x)-L| &< \sqrt{\varepsilon/3}, & \text{當 } 0 < |x-a| < \delta_1 \\ |f(x)-L| &< \frac{\varepsilon}{3(1+|M|)}, & \text{當 } 0 < |x-a| < \delta_2 \\ |g(x)-M| &< \sqrt{\varepsilon/3}, & \text{當 } 0 < |x-a| < \delta_3 \\ |g(x)-M| &< \frac{\varepsilon}{3(1+|L|)}, & \text{當 } 0 < |x-a| < \delta_4 \end{aligned} \right\} \quad \text{⑩}$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ ，則 $\delta \leq \delta_1$ ， $\delta \leq \delta_2$ ， $\delta \leq \delta_3$ 且 $\delta \leq \delta_4$ 。

於是，若 x 滿足 ⑦ 式，則 x 也滿足 ⑩ 式右邊的四個不等式。

所以，

$$\begin{aligned} &|L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)| \\ &\leq |L(g(x)-M)|+|M(f(x)-L)|+|(f(x)-L)(g(x)-M)| \\ &= |L||g(x)-M|+|M||f(x)-L|+|f(x)-L||g(x)-M| \\ &< |L|\frac{\varepsilon}{3(1+|L|)}+|M|\frac{\varepsilon}{3(1+|M|)}+\sqrt{\varepsilon/3}\sqrt{\varepsilon/3} \quad (\text{由 ⑩ 式}) \\ &= \frac{\varepsilon}{3}\frac{|L|}{1+|L|}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{|M|}{1+|M|}+\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \end{aligned}$$

於是，對於選擇的 δ ，當 ⑦ 式成立時，⑨ 式成立。證明完畢。

(4) 我們足以證明 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ ，一旦完成，應用 (3) 於乘積 $f(x) \cdot$

$\frac{1}{g(x)}$ 可以獲得所要的結果。考慮

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M-g(x)}{Mg(x)} \right| = \frac{1}{|M||g(x)|} |g(x)-M| \quad (11)$$

因 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ，故存在一 $\delta_1 > 0$ ，使得若 $0 < |x-a| < \delta_1$ ，則

$$|g(x)-M| < \frac{|M|}{2}.$$
 因而對所有如此的 x ，

$$|M| = |g(x) + (M-g(x))| \leq |g(x)| + |M-g(x)| < |g(x)| + \frac{|M|}{2}$$

所以， $\frac{|M|}{2} < |g(x)|$ 或 $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$

代入 (11) 式中，可得若 $0 < |x-a| < \delta_1$ ，則

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \frac{2}{|M|^2} |g(x)-M| \quad (12)$$

再用 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ 的事實，對每一 $\varepsilon > 0$ ，存在一 $\delta_2 > 0$ ，使得若

$0 < |x-a| < \delta_2$ ，則

$$|g(x)-M| < \frac{|M|^2}{2} \varepsilon \quad (13)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 。若 $0 < |x-a| < \delta$ ，則由 (12) 式與 (13) 式，可知

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon, \text{ 此表示 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

定理 1.8 夾擠定理

設在一包含 a 的開區間中的所有 x (可能在 a 除外)，恆有 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 。

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

則 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

證 令 $\varepsilon > 0$ 為給定者：因 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ，故存在一 $\delta_1 > 0$ ，使得若 $0 < |x - a| < \delta_1$ ，則 $|f(x) - L| < \varepsilon$ ，即，若 $0 < |x - a| < \delta_1$ ，則 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ 。因 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ，故存在一 $\delta_2 > 0$ ，使得

$$\text{若 } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ 則 } |g(x) - L| < \varepsilon$$

即

$$\text{若 } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ 則 } L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 。

若 $0 < |x - a| < \delta$ ，則 $0 < |x - a| < \delta_1$ ， $0 < |x - a| < \delta_2$ ，因此

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$$

尤其，

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

即， $|h(x) - L| < \varepsilon$

所以， $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ 。

定理 2.9 連鎖法則

若 $y = f(u)$ 與 $u = g(x)$ 皆為可微分函數，則合成函數 $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 為可微分，且

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

上式亦可用萊布尼茲符號表成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

證 由於函數 $y = f(u)$ 在 $u = g(x)$ 為可微分，所以

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}.$$

定義一新函數 ε 如下：

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } \Delta u = 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta u} - \frac{dy}{du}, & \text{若 } \Delta u \neq 0 \end{cases}$$

當 $\Delta u \neq 0$ 時, $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} + \varepsilon$,

故

$$\Delta y = \frac{dy}{du} \Delta u + \varepsilon \Delta u \quad (*)$$

由於對 $\Delta u = 0$, 則 $\Delta y = 0$ (y 是 u 的連續函數), 故 $(*)$ 式對 $\Delta u = 0$ 或 $\Delta u \neq 0$ 均成立.

今以 Δx 除 $(*)$ 式的兩邊, 可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \varepsilon \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right).$$

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{du} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon \right) \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{dy}{du} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon \right) \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

現在, 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時, 由於 u 是 x 的連續函數, 故 $\Delta u \rightarrow 0$, 於是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} - \frac{dy}{du} \right) = 0$$

因此, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + 0 \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$

定理 4.5

若 f 與 g 在 $[a, b]$ 皆為可積分, 則

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

證 因 f 與 g 在 $[a, b]$ 上可積分, $\int_a^b f(x) dx$ 與 $\int_a^b g(x) dx$ 皆存在.

假設 $\int_a^b f(x) dx = M$ 與 $\int_a^b g(x) dx = N$

令 $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ 與 $\sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i$ 為黎曼和具有相同之分割

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

且 $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$

因 $M = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$, 與

$$N = \int_a^b g(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i,$$

故對任意 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, 存在一數 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\text{當 } \|P\| < \delta_1 \text{ 時 } \Rightarrow \left| M - \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textcircled{1}$$

且存在一數 $\delta_2 > 0$, 使得

$$\text{當 } \|P\| < \delta_2 \text{ 時 } \Rightarrow \left| N - \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textcircled{2}$$

若令 $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$, 則當 $\|P\| < \delta$ 時, ① 與 ② 式同時成立. 故

$$\text{當 } \|P\| < \delta \text{ 時 } \Rightarrow \left| M - \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| + \left| N - \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

利用三角不等式之關係, 當 $\|P\| < \delta$ 時 \Rightarrow

$$\left| (M - \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i) + (N - \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i) \right| < \varepsilon$$

或

$$\left| (M + N) - (\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i) \right| < \varepsilon \quad \textcircled{3}$$

因

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + g(x_i^*)] \Delta x_i \quad \textcircled{4}$$

將 ④ 式代入 ③ 式得

$$\left| (M+N) - \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + g(x_i^*)] \Delta x_i \right| < \varepsilon,$$

無論何時 $\|P\| < \delta$.

故
$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) + g(x_i^*)] \Delta x_i = M + N$$

所以
$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
 成立。

定理 11.4

設 f 為定義在 $x \geq n_0$ (n_0 為某固定正整數) 的函數, 且 $\{a_n\}$ 為一數列使得對 $n \geq n_0$, $a_n = f(n)$ 成立.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (或 $-\infty$), 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (或 $-\infty$).

證 (1) 假設 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, 則對每一個正數 ε , 存在一正數 M 使得對所有 x ,

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

令 N 為大於 M 的整數且大於或等於 n_0 .

若 $n > N$, 則 $a_n = f(n)$ 且 $|a_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

(2) 留給讀者自證。

定理 11.9

收斂數列必為有界。

證 假設 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ，並選取任一正數 $\varepsilon = 1$ ，則存在一正整數 N ，使得 $n > N$ 時， $|a_n - L| < 1$ 。此表示 $n > N$ 時， $|a_n| < 1 + |L|$ 。因此， $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |L|\}$ ， $n > N$ 。

定理 11.22 極限比較檢驗法

假設 $a_n > 0$ 且 $b_n > 0$ ， $\forall n > N$ (N 為正整數)。

- (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ， $0 < L < \infty$ ，則 $\sum a_n$ 與 $\sum b_n$ 同時收斂或同時發散。
- (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 且 $\sum b_n$ 收斂，則 $\sum a_n$ 收斂。
- (3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ 且 $\sum b_n$ 發散，則 $\sum a_n$ 發散。

證 (1) 在數列的極限定義中取 $\varepsilon = \frac{L}{2}$ ，則必存在一個 N ，使得

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2}, \text{ 即}$$

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}$$

上述的不等式相當於 (各加上 L)

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \quad \left(\frac{L}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3L}{2}\right)b_n.$$

若 $\sum b_n$ 收斂，則由比較檢驗法知， $\sum \left(\frac{3L}{2}\right)b_n$ 與 $\sum a_n$ 收斂。

若 $\sum b_n$ 發散，則由比較檢驗法知， $\sum \left(\frac{L}{2}\right)b_n$ 與 $\sum a_n$ 發散。

- (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 則存在某正整數 N , 使得 $0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1 \quad \forall n > N$. 於是, 對 $n > N$, $a_n < b_n$. 由比較檢驗法, 由於 $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ 收斂, 故 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 亦收斂. 於是, $\sum a_n$ 收斂, 因為一級數加上有限項之後並不影響級數的斂散性.
- (3) 留給讀者自證之.

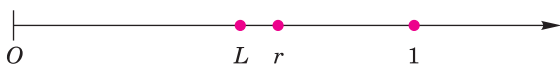
定理 11.23 比值檢驗法

設 $\sum a_n$ 為正項級數且令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

- (1) 若 $L < 1$, 則級數收斂.
 (2) 若 $L > 1$, 或 $L = \infty$, 則級數發散.

證 (1) 假設 $L < 1$. 由於 $a_n > 0$ 對所有正整數 n , a_{n+1}/a_n 對所有 n 與 L 皆為正. 選擇一數 r 介於 L 與 1 之間, 使得 $0 \leq L < r < 1$, 如下圖所示, 因而 $r - L > 0$.



因為 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, 則存在一正整數 N , 使得對所有 $n \geq N$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < r - L$$

或

$$L - (r - L) < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + (r - L)$$

所以,

$$a_{n+1} < a_n r \quad \forall n \geq N. \text{ 於是,}$$

$$a_{N+1} < a_N r,$$

$$a_{N+2} < a_{N+1} r < a_N r^2,$$

$$a_{N+3} < a_{N+2}r < a_N r^3,$$

$$\vdots$$

由於 $r = |r| < 1$. 因此, 下列的幾何級數

$$a_N r + a_N r^2 + a_N r^3 + \cdots, \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

為收斂. 又由比較檢驗法知, 級數

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots, \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

的每一項皆小於收斂幾何級數 ① 的對應項. 所以, $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 收斂.

又因為刪掉有限個項, 不會影響級數的斂散性, 所以, 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收斂.

(2) 假設 $L > 1$. 如上所述, 存在一正整數 N , 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n \geq N$, 亦即,

$$a_{n+1} > a_n, \forall n \geq N.$$

但 $a_N > 0$ 因為這是一個正項級數, 所以

$$a_n > a_N > 0, \forall n \geq N.$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 為發散.

定理 13.5

若 f, f_x, f_y, f_{xy} 與 f_{yx} 在開區域 R 皆為連續, 則對 R 中任一點 (a, b) ,

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

證 我們定義兩函數 $\phi(y)$ 與 $\psi(x)$ 分別定義如下:

$$\phi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

$$\psi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$$

則

$$\phi(b+k) - \phi(b) = [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] - [f(a+h, b) - f(a, b)],$$

$$\psi(a+h)-\psi(a)=[f(a+h, b+k)-f(a+h, b)]-[f(a, b+k)-f(a, b)],$$

因此,

$$\phi(b+k)-\phi(b)=\psi(a+h)-\psi(a) \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

我們應用均值定理於 ① 式等號的兩端, 可得

$$k\phi'(b+\alpha k)=h\psi'(a+\beta h) \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

現在

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= f_y(a+h, y) - f_y(a, y), \\ \psi'(x) &= f_x(x, b+k) - f_x(x, b), \end{aligned}$$

則 ② 式變為

$$\begin{aligned} &k[f_y(a+h, b+\alpha k) - f_y(a, b+\alpha k)] \\ &= h[f_x(a+\beta h, b+k) - f_x(a+\beta h, b)] \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

視 $a+h$ 為常數, 而將 $f_y(a+h, b+\alpha k)$ 與 $f_y(a, b+\alpha k)$ 分別視作 x 的函數. 則得 $f_y(x, b+\alpha k)$ 在 $a+h$ 與 a 的函數值分別為 $f_y(a+h, b+\alpha k)$ 與 $f_y(a, b+\alpha k)$, 再應用均值定理於 ③ 式等號的兩端, 可得

$$f_y(a+h, b+\alpha k) - f_y(a, b+\alpha k) = hf_{yx}(a+sh, b+\alpha k), \quad 0 < s < 1.$$

同理,

$$f_x(a+\beta h, b+k) - f_x(a+\beta h, b) = kf_{xy}(a+\beta h, b+tk), \quad 0 < t < 1.$$

故

$$kh f_{yx}(a+sh, b+\alpha k) = hk f_{xy}(a+\beta h, b+tk)$$

$$0 < s < 1, \quad 0 < t < 1$$

消去 hk , 且令 $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, 依 f_{yx} 與 f_{xy} 的連續性, 可得

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b).$$

定理 13.6

設 f_x 與 f_y 在各邊皆平行於坐標軸且包含點 (a, b) 與 $(a+\Delta x, b+\Delta y)$ 之矩形區域 R 中各點皆存在，又 f_x 與 f_y 在點 (a, b) 皆為連續，並令 $\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b)$ 則

$$\Delta z = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

此處 ε_1 與 ε_2 皆為 Δx 與 Δy 的函數，當 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ 時， $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ， $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 。

證 由圖所示，由點 A 移到點 C ， f 的變化為

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

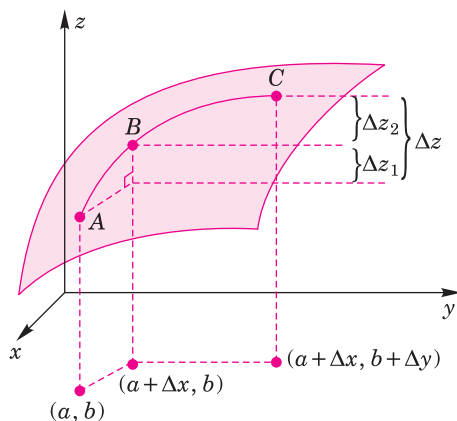
或

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= [f(a+\Delta x, b) - f(a, b)] + [f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b)] \end{aligned}$$

現在由 A 移到 B ，若 x 變化，則 y 固定，因此，由均值定理知，存在一數 x_1 ， $a < x_1 < a+\Delta x$ ，使得

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &= f(a+\Delta x, b) - f(a, b) \\ &= f_x(x_1, b) \Delta x \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

同理，由 B 移到 C ，則 x 固定且 y 變化；於是，存在一數 y_1 ， $b < y_1 < b+\Delta y$ ，使得



$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b)$$

$$\begin{aligned} \Delta z_2 &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) \\ &= f_y(a + \Delta x, y_1) \Delta y \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

我們定義 ε_1 與 ε_2 分別為

$$\varepsilon_1 = f_x(x_1, b) - f_x(a, b)$$

與

$$\varepsilon_2 = f_y(a + \Delta x, y_1) - f_y(a, b)$$

依 f_x 與 f_y 的連續性, 且 $a < x_1 < a + \Delta x$, $b < y_1 < b + \Delta y$, 可知當 $\Delta x \rightarrow 0$ 且 $\Delta y \rightarrow 0$ 時, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. 於是,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 = [f_x(a, b) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(a, b) + \varepsilon_2] \Delta y \\ &= f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

其中 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$; $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

定理 13.9

若 f 為 x 與 y 的可微分函數, 且 x 與 y 皆為 t 的可微分函數, 則 f 為 t 的可微分函數, 且

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

證 因 x 與 y 皆為 t 的可微分函數, 當 t 變化 Δt 時, 則導致 x 的變化 Δx 與 y 的變化 Δy . 依定理 13.6, 可知

$$\Delta f = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

此處, 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 與 $\Delta y \rightarrow 0$ (亦即, 當 $\Delta t \rightarrow 0$) 時, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 且 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. 於是, 對 $\Delta t \neq 0$, 可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時, 上式兩端取極限, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} &= f_x(x, y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + (\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \\ &\quad + (\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \left(\frac{dx}{dt} \right) + 0 \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

定理 13.10

令 $z=f(x, y)$ 為可微分函數，且 $x=g(u, v)$ 與 $y=h(u, v)$ 皆為可微分函數，則 f 為 u 與 v 的可微分函數，且

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

證 若將 v 固定 ($\Delta v=0$) 而 u 變化 Δu ，則 x 變化 Δx ， y 變化 Δy 。所以，

$$\begin{aligned} \Delta x &= g(u + \Delta u, v) - g(u, v) \\ \Delta y &= h(u + \Delta u, v) - h(u, v) \end{aligned}$$

因 f 是可微分，故

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

其中 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ 且 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$ 。

若 $\Delta u \neq 0$ ，則

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta u} &= f_x \frac{\Delta x}{\Delta u} + f_y \frac{\Delta y}{\Delta u} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} &= f_x \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} \right) + f_y \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) + (\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon_1) \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} \right) \end{aligned}$$

$$+(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon_2) \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdots \cdots \cdots (*)$$

因 f 為 x 與 y 的函數，且 x 與 y 又皆為 u 與 v 的函數，故 f 為 u 與 v 的函數。由於 v 固定且 u 變化 Δu ，故

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u+\Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{g(u+\Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{h(u+\Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

又 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ 與 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ ，代入 (*) 式可得

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理可證

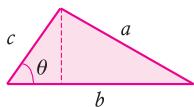
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

附錄 II : 公式彙集

三角形：

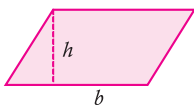
$$\text{面積} = \frac{1}{2}bh$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



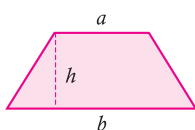
平行四邊形：

$$\text{面積} = bh$$



梯形：

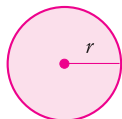
$$\text{面積} = \frac{h}{2}(a+b)$$



圓：

$$\text{面積} = \pi r^2$$

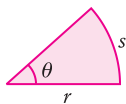
$$\text{周長} = 2\pi r$$



圓的扇形：

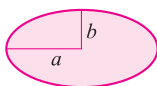
$$\text{面積} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$s = r\theta$$



橢圓：

$$\text{面積} = \pi ab$$

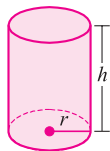


正圓柱：

$$\text{體積} = \pi r^2 h$$

$$\text{側表面積} = 2\pi r h$$

$$\text{總表面積} = 2\pi r(r+h)$$

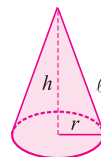


正圓錐：

$$\text{體積} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{側表面積} = \pi r \ell$$

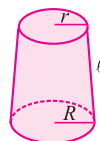
$$\text{總表面積} = \pi r(r + \ell)$$



正圓錐的錐台：

$$\text{體積} = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$$

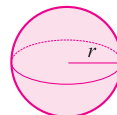
$$\text{側表面積} = \pi(r+R)\ell$$



球：

$$\text{體積} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

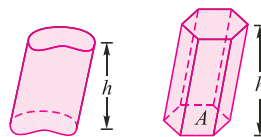
$$\text{表面積} = 4\pi r^2$$



柱體或角柱：

$$\text{體積} = Ah$$

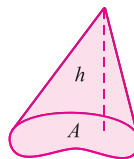
(A 為底面積)



錐：

$$\text{體積} = \frac{1}{3}Ah$$

(A 為底面積)



點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $ax + by + c = 0$ 的距離：

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

通過點 (x_0, y_0, z_0) 且方向數為 l, m, n 之直線的方程式：

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$